

從「阿羅不可能定理」看社會矛盾（一）

李樹甘 吳祖堯 香港樹仁大學商業、經濟及公共政策研究中心

相信不少人有感現在香港的社會矛盾日益嚴重，除了最低工資及標準工時外，特惠生果金及全民退休保障亦是社會爭論不斷的話題。不論傾向哪種政策，總會引起不少反對聲音，令政府可能有無所適從的感覺。

撇開政治因素，此現象其實可用 1972 年度諾貝爾經濟學獎得主肯尼士·約瑟夫·阿羅(Kenneth Joseph Arrow)的「阿羅不可能定理」(Arrow's Impossibility Theorem)解釋。我們只需使用簡單的邏輯便可理解箇中道理。

假設社會上只有甲、乙、丙三位投票者，面對著 A、B、C 三種政策方案建議，他們根據各自的喜愛程度對三種政策方案建議排序。例如 $A > B > C$ ，則表示這個人最喜歡 A，其次是 B，最後是 C。排序結果見表。

投票者 對政策方案建議的偏好排序

甲 $A > B > C$

乙 $B > C > A$

丙 $C > A > B$

如果以少數服從多數的民主投票方式，我們可以根據三位投票者的偏好得出以下結論：首先，在 A 和 B 之間的選擇中，甲和丙會選擇 A（因 $A > B$ ，見表），只有乙選擇 B，由於少數服從多數，最終得

出 $A > B$ 的結論。其次，在 B 和 C 之間的選擇中，甲和乙會選擇 B ，只有丙選擇 C ，最終得出 $B > C$ 的結論。最後，在 A 和 C 之間的選擇中，乙和丙會選擇 C ，只有甲選擇 A ，最終得出 $C > A$ 的結論。

綜合以上三組結論，這個（三人）社會對 A 、 B 、 C 三種政策方案建議的偏好是： $A > B$ ， $B > C$ ， $C > A$ 。即社會認為方案建議 A 勝於 B 、方案建議 B 勝於 C 、方案建議 C 勝於 A 。我們不難看出當中出現矛盾之處：社會認為方案建議 A 勝於 C （因 $A > B$ ，而 $B > C$ ，故 $A > C$ ），但同時認為 A 不如 C （因 $C > A$ ）。這是由十八世紀法國思想家孔多塞·康得爾塞(Marquis de Coudorcet)提出的「投票悖論」(paradox of voting)，而「阿羅不可能定理」則利用數學對此作出論證。

面對民主樽頸不可自亂陣腳

由此可見，即使在只有三個人的社會，每個社會成員對三種政策的偏好有所不同時，少數服從多數的民主投票方式不可能得到令所有人都滿意的結果。現實中，社會的人數何只三個？在一些政策的爭論中，亦可看出有不少備選的方案，例如究竟社會需要特惠生果金、全民退休保障、還是優化強積金制度呢？好像推行哪種政策都會引起不少反對聲音。

值得注意的是在「投票悖論」中，三位投票者的偏好是公開的。這意味著即使有充分諮詢，亦難以得到一個令所有人都滿意的結果。「投票悖論」是民主發展的樽頸，大家一同以理性的角度分析，不要因意見不合而自亂陣腳。雖然「阿羅不可能定理」或「投票悖論」並非不可破解，但似乎只能在數學上得到解決，筆者會於下篇文章再作探討。